DEVOIR DE SYNTHESE N°2

MATHEMATIQUES 4 M$_{1+2}$

EXERCICE N°1

Dans un plan orienté , on considère le carré ABCD de centre O tel que $(\widehat{\overrightarrow{AB},\overrightarrow{AD}}) \equiv \frac{\pi}{2}\ [2\pi]$.

On désigne par I et J les milieux respectifs des segments $[AB]$ et $[AD]$.

1/ On note S la similitude directe qui transforme D en O et C en I.

a) Déterminer le rapport et l'angle de S.

b) Trouver une construction géométrique du centre Ω de S.

2/ a) Préciser $S[(BD)]$ et $S[(BC)]$.

b) Déterminer alors les images de B et de A par S.

c) Montrer que Ω est le barycentre des points pondérés (B ; 1) et (J ; 4) .

3/ Soit R la rotation de centre O et d'angle $\frac{\pi}{2}$. On pose h = R o S et on note Ω' le milieu de $[\Omega B]$.

a) Préciser h (B) puis caractériser h.

b) Justifier que le triangle $O\Omega\Omega'$ est rectangle et isocèle.

4/ Soit maintenant σ la similitude indirecte qui envoie D en O et C en I.
$S_{(OI)}$ est la symétrie orthogonale d'axe (OI).

a) Vérifier que $\sigma = S_{(OI)}$ o S puis déterminer $\sigma(B)$.

b) Donner alors la forme réduite de la similitude indirecte σ.

EXERCICE N°2

Soit P un plan orienté rapporté à un repère orthonormé direct $(O, \vec{i}, \vec{j})$.
On donne les points A (1, 0) , B (-1 , 0) et C (-1 , -1).
A tout point M d'affixe z on fait correspondre le point M_1 d'affixe z_1 par l'homothétie de centre A et de rapport 2 ; au même point M on fait correspondre le point M_2 d'affixe z_2 par la similitude directe de centre B , de rapport 2 et d'angle $\frac{\pi}{2}$.

1/ Calculer z_1 et z_2 en fonction de z .

2/ Soit M' le milieu de $[M_1M_2]$.
Calculer l'affixe z' du point M' en fonction de z ; Caractériser l'application T qui au point M associe M'

3/ Démontrer que , pour $M \neq C$, le triangle CMM' est rectangle isocèle .

PROBLEME

I /

Soit les fonctions $f : x \mapsto \frac{1}{4}(e^x - e^{-x})$ et $g : x \mapsto \frac{1}{4}(e^x + e^{-x})$ et soit $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' leurs courbes représentatives respectives dans un repère orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$.

1/ a) Etudier les variations de f . En déduire le signe de f (x).

b) Etudier les variations de g . En déduire que : $\forall\, x \in \mathbb{R} \quad g(x) - \frac{1}{2} \geq 0$.

2/ a) Etudier la parité de f et de g.

b) Etudier les branches infinies de $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$' au voisinage de $(+\infty)$.

c) Trouver une équation cartésienne de la tangente D à $\mathscr{C}$ au point 0.

d) Etudier le signe de $u(x) = f(x) - \frac{1}{2}x$ (étudier le sens de variation de u et calculer u (0)).

En déduire la position de D par rapport à $\mathscr{C}$.

e) Tracer la droite D et les courbes $\mathscr{C}$ et $\mathscr{C}$'.

3/ a) Montrer que f admet une fonction réciproque f^{-1} définie sur IR par :

$$f^{-1}(x) = \text{Log}\,(2x + \sqrt{4x^2 + 1})$$

b) Montrer que f^{-1} est dérivable sur IR et calculer $(f^{-1})'(x)$ pour tout $x \in$ IR.

c) En déduire la valeur de l'intégrale $\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{2}{\sqrt{4t^2 + 1}}\, dt$.

II /

On considère la fonction φ définie sur IR par $\varphi(x) = \frac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$.

1/ a) Etudier les variations de φ.

b) Montrer que φ admet une réciproque h définie sur] -1 , 1 [.

c) Montrer que pour tout $x \in \,]-1, 1[$ $\quad h(x) = \frac{1}{2}\text{Log}\,(\frac{1+x}{1-x})$.

d) Calculer h' (x) pour tout $x \in \,]-1, 1[$. Justifier alors l'égalité : $h(x) = \int_0^x \frac{1}{1-t^2}\, dt$.

2/ Soit Ψ la fonction définie sur $]0, \pi[$ par : $\Psi(x) = \int_0^{\cos x} \frac{1}{1-t^2}\, dt$.

a) Montrer que Ψ est dérivable sur $]0, \pi[$ et calculer $\Psi'(x)$ pour $x \in \,]0, \pi[$.

b) En déduire la primitive K de la fonction $k : x \mapsto \frac{1}{\sin x}$, sur $]0, \pi[$, s'annulant pour $x = \frac{\pi}{3}$.